第44講　平面ベクトル(5)

例題 44 ― 1

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ.

(1)　点 A(4, 3) を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ 1)$ に平行な直線.

(2)　2 点 A(−1, 1)，B(2, −5) を通る直線.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 44 ー 1

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ.

(1)　点 A(3, 2) を通り，ベクトル $\vec{d}=(1,\ -3)$ に平行な直線.

(2)　2 点 A(−1, 0)，B(0, 2) を通る直線.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 44 － 2

(1)　点 A$(3,\ -4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(2)　点 A$(0,\ -1)$ から直線 $l：x-3y+2=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする．H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 44 ー 2

(1)　点 A$(5,\ -1)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

(2)　点 A$(4,\ 1)$ から直線 $l：2x-y+3=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする．H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 44 ー 3

平面上の定点 A$(\vec{a})$ と動点 P$(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか．

(1)　$|\vec{p}-\vec{a}|=1$　　　(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 44 − 3

平面上の異なる 2 つの定点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) と動点 P($\vec{p}$) に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか.

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　　(2)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 44 ー 4

△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする．実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P はそれぞれどのような図形を描くか．O，A，B を適当にとって図示せよ．

(1)　$\alpha>0$，$\beta>0$　　(2)　$\alpha+\beta=1$

(3)　$\alpha+2\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 44 － 4

△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする．実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P はそれぞれどのような図形を描くか．O，A，B を適当にとって図示せよ．

(1) $\alpha+\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$　　(2) $3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 44 講　平面ベクトル(5)

(1)　2 点 A(3, 2), B(5, 6) を通る直線の方程式を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{cases} x = \boxed{\text{ア}}\, t + 3 \\ y = 4t + \boxed{\text{イ}} \end{cases}$$ である.

(2)　点 A(3, −2) を通り, 直線 OA に垂直な直線の方程式は

$\boxed{\text{ウ}}\, x - \boxed{\text{エ}}\, y - \boxed{\text{オカ}} = 0$ である.

(3)　平面上の異なる 2 つの定点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) と動点 P($\vec{p}$) に対し, ベクトル方程式

$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}| = 6$ は, 線分 AB を $1 : \boxed{\text{キ}}$ に内分する点を中心とする半径 $\boxed{\text{ク}}$ の円を表す.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　平面ベクトル(5)

例題 44－1

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ.

(1)　点 A(4, 3) を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ 1)$ に平行な直線.

(2)　2点 A(−1, 1)，B(2, −5) を通る直線.

求める直線上の任意の点の座標を P$(x,\ y)$ とし，P$(\vec{p})$ とする.

(1)　点 A$(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(4,\ 3)+t(2,\ 1)$

$=(2t+4,\ t+3)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=2t+4} \\ \boldsymbol{y=t+3} \end{cases}$　（t は媒介変数）

(2)　2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 1)+t(2,\ -5)$

$=(-1+t,\ 1-t)+(2t,\ -5t)=(3t-1,\ -6t+1)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=3t-1} \\ \boldsymbol{y=-6t+1} \end{cases}$　（t は媒介変数）

(別解)　$\overrightarrow{AB}=(3,\ -6)$ より，求める直線のベクトル方程式は　$\vec{p}=\vec{a}+t\overrightarrow{AB}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(-1,\ 1)+t(3,\ -6)=(3t-1,\ -6t+1)$

よって　$\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-6t+1 \end{cases}$　（t は媒介変数）

類題 44－1

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ.

(1)　点 A(3, 2) を通り，ベクトル $\vec{d}=(1,\ -3)$ に平行な直線.

(2)　2点 A(−1, 0)，B(0, 2) を通る直線.

求める直線上の任意の点の座標を P$(x,\ y)$ とし，P$(\vec{p})$ とする.

(1)　点 A$(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(3,\ 2)+t(1,\ -3)=(t+3,\ -3t+2)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=t+3} \\ \boldsymbol{y=-3t+2} \end{cases}$　（t は媒介変数）

(2)　2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 0)+t(0,\ 2)$

$=(-1+t,\ 0)+(0,\ 2t)=(t-1,\ 2t)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=t-1} \\ \boldsymbol{y=2t} \end{cases}$　（t は媒介変数）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(別解)　$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2)$ より，求める直線のベクトル方程式は　$\vec{p}=\vec{a}+t\overrightarrow{AB}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(-1,\ 0)+t(1,\ 2)=(t-1,\ 2t)$

よって　$\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t \end{cases}$　（t は媒介変数）

例題 44 － 2

(1)　点 $A(3,\ -4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

(2)　点 $A(0,\ -1)$ から直線 $l : x-3y+2=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする．H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ.

(1)　求める直線上の任意の点の座標を $P(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ である.

$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y+4)$ より　$2(x-3)-3(y+4)=0$

よって求める方程式は　$\boldsymbol{2x-3y-18=0}$

(2)　$\vec{n}=(1,\ -3)$ とおくと，$\vec{n}$ は直線 l の法線ベクトルの 1 つである.

よって，$\overrightarrow{AH}/\!/\vec{n}$　より　$\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$（$k$ は実数）とおける.

$H(s,\ t)$ とおくと　$\overrightarrow{AH}=(s,\ t+1)$ より　$(s,\ t+1)=k(1,\ -3)$

よって　$s=k,\ t+1=-3k$　より　$s=k,\ t=-3k-1$　……①

また，点 H は直線 l 上の点より　　$s-3t+2=0$　……②

②に①を代入して　$k-3(-3k-1)+2=0$　　　$k=-\dfrac{1}{2}$

このとき①より　$s=-\dfrac{1}{2},\ t=\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$\boldsymbol{H\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

また，$\overrightarrow{AH}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$　より　$AH=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

類題 44 － 2

(1)　点 $A(5,\ -1)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

(2)　点 $A(4,\ 1)$ から直線 $l : 2x-y+3=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする．H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ.

(1)　求める直線上の任意の点の座標を $P(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ である.

$\overrightarrow{AP}=(x-5,\ y+1)$ より　$1(x-5)+3(y+1)=0$

よって求める方程式は　$\boldsymbol{x+3y-2=0}$

(2)　$\vec{n}=(2,\ -1)$ とおくと，$\vec{n}$ は直線 l の法線ベクトルの 1 つである.

よって，$\overrightarrow{AH}/\!/\vec{n}$　より　$\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$（$k$ は実数）とおける.

$H(s,\ t)$ とおくと　$\overrightarrow{AH}=(s-4,\ t-1)$ より　$(s-4,\ t-1)=k(2,\ -1)$

よって　$s-4=2k,\ t-1=-k$　より　$s=2k+4,\ t=-k+1$　……①

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，点Hは直線 l 上の点より　$2s-t+3=0$　……②

②に①を代入して　$2(2k+4)-(-k+1)+3=0$　　$k=-2$

このとき①より　$s=0,\ t=3$　　ゆえに　**H(0, 3)**

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-4,\ 2)$　より　$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\mathbf{2\sqrt{5}}$

例題 44 − 3

平面上の定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか.

(1)　$|\vec{p}-\vec{a}|=1$　　　　(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$

(1)　**点 A を中心とする半径 1 の円**

(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$　より　$3\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right|=6$　つまり　$\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right|=2$

よって**線分 OA を 2：1 に内分する点を中心とする半径 2 の円**

類題 44 − 3

平面上の異なる 2 つの定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか.

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　　　　(2)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　より　$2\left|\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|=3$　つまり　$\left|\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|=\dfrac{3}{2}$

よって　**線分 OA の中点を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円**

(2)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$　より　$|3(\vec{p}-\vec{a})+2(\vec{p}-\vec{b})|=5$

$|5\vec{p}-(3\vec{a}+2\vec{b})|=5$　つまり　$\left|\vec{p}-\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\right|=1$

よって　**線分 AB を 2：3 に内分する点を中心とする半径 1 の円**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

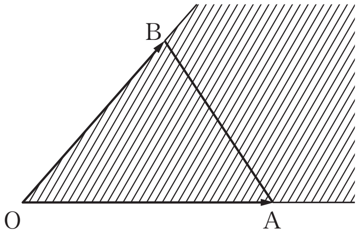
例題 44 ー 4

△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P はそれぞれどのような図形を描くか．O，A，B を適当にとって図示せよ．

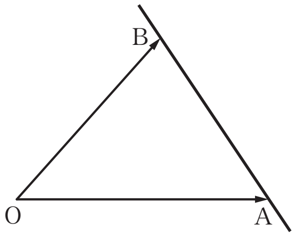
(1)　$\alpha>0$，$\beta>0$　　(2)　$\alpha+\beta=1$

(3)　$\alpha+2\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

(1)　下図斜線部．境界含まず．



(2)　直線 AB（下図）

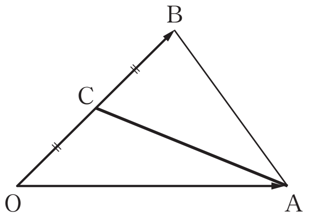


(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\beta\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\beta\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\alpha+2\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

よって点 P の存在範囲は線分 AC（右図）

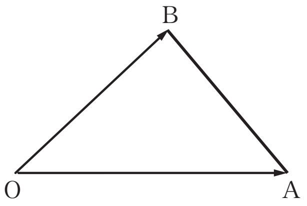


類題 44 ー 4

△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P はそれぞれどのような図形を描くか．O，A，B を適当にとって図示せよ．

(1)　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$　　(2)　$3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$

(1)　線分 AB（下図）

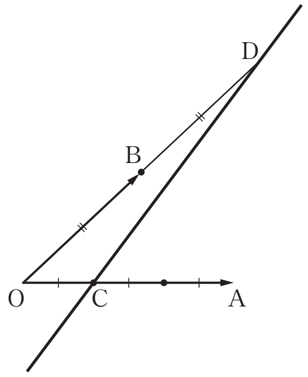


(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\alpha\cdot\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{1}{2}\beta\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$

よって点 P の存在範囲は直線 CD（右図）



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　平面ベクトル(5)

(1)　2点A(3, 2), B(5, 6)を通る直線の方程式を媒介変数tを用いて表すと

$$\begin{cases} x = \boxed{\text{ア}}\,t+3 \\ y = 4t + \boxed{\text{イ}} \end{cases}$$ である.

(2)　点A(3, −2)を通り，直線OAに垂直な直線の方程式は

$\boxed{\text{ウ}}\,x - \boxed{\text{エ}}\,y - \boxed{\text{オカ}} = 0$ である.

(3)　平面上の異なる2つの定点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$)と動点P($\vec{p}$)に対し，ベクトル方程式

$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=6$ は，線分ABを1：$\boxed{\text{キ}}$に内分する点を中心とする半径$\boxed{\text{ク}}$の円を表す.

解答例

(1)　求める直線上の任意の点の座標をP(x, y)とし，P($\vec{p}$)とする.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 4)$ より，求める直線のベクトル方程式は　$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　と表せる.

つまり　$(x,\ y)=(3,\ 2)+t(2,\ 4)=(2t+3,\ 4t+2)$

よって　$\begin{cases} x = \mathbf{2}t+3 \\ y = 4t+\mathbf{2} \end{cases}$　(tは媒介変数)

(2)　求める直線上の任意の点をP(x, y)とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+2)$

求める直線の法線ベクトルの1つは$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ -2)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より　$3(x-3)-2(y+2)=0$

よって　$\mathbf{3}x-\mathbf{2}y-\mathbf{13}=0$

(3)　$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=6$　より　$|2(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})|=6$

$|3\vec{p}-(2\vec{a}+\vec{b})|=6$　　$3\left|\vec{p}-\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=6$　　つまり　$\left|\vec{p}-\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=2$

よって　線分ABを1：**2**に内分する点を中心とする半径**2**の円を表す.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。